JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 7, 395–398 (1973)

Zur rationalen Approximierbarkeit von e^{-x} über $[0, \infty)$

A. SCHÖNHAGE

Fachbereich Mathematik, Universität Tübingen, 7400 Tübingen, West Germany

Communicated by G. Meinardus

Received January 25, 1971

In [1] wurde gezeigt, daß die Größen

$$\lambda_n = \min_{p \in \Pi_n} \sup_{x \geqslant 0} | e^{-x} - (1/p(x))|, \tag{1}$$

worin Π_n die Menge der reellen Polynome vom Grade n bezeichnet, geometrisch abnehmen und $\sigma = \overline{\lim}_{n \to \infty} (\lambda_n)^{1/n}$ der Ungleichung $\frac{1}{6} \leqslant \sigma \leqslant 0.435...$ genügt.

Wir betrachten zunächst die polynomische L^2-Approximation mit der Laguerre-Belegung e^{-t} über $[0, \infty)$ zu $f(x) = e^{x/4}$ und gewinnen daraus dann die Schranken

$$\frac{1}{6((4n+4)\lg 3 + 2 \lg 2)^{1/2}} \leqslant 3^n \lambda_n \leqslant (2)^{1/2}, \tag{2}$$

insbesondere also $\sigma = \lim_{n \to \infty} (\lambda_n)^{1/n} = \frac{1}{3}$.

Mittels der Laguerre-Polynome in der normierten Form

$$L_n(x) = (e^x/n!)(e^{-x}x^n)^{(n)} \qquad \text{(vgl. [2, p. 100])} \tag{3}$$

erhält man zu $f(t) = e^{t/4}$ die Laguerre-Koeffizienten

$$c_m = \int_0^\infty e^{-t} e^{t/4} L_m(t)\, dt = \frac{1}{m!} \int_0^\infty (e^{-t} t^m)^{(m)}\, e^{t/4}\, dt = \frac{(-1)^m \cdot 4}{3^{m+1}} \tag{4}$$

durch m-fache partielle Integration. In Π_n hat f demnach das Laguerre-Proximum

$$g_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{4}{3^{m+1}} (-1)^m L_m(x) \tag{5}$$

mit dem minimalen Fehlerquadrat

$$\int_0^\infty e^{-t}(e^{t/4} - g_n(t))^2\, dt = \sum_{m=n+1}^{\infty} c_m{}^2 = \frac{2}{3^{2n+2}} \,. \tag{6}$$

In (1) kann e^{-x} durch $e^{-x/4}$ ersetzt werden. Zur Herleitung der unteren Schranke betrachten wir $p_n \in \Pi_n$ mit

$$| e^{-x/4} - (1/p_n(x)) | \leqslant \lambda_n \qquad \text{für} \quad x \geqslant 0$$

oder dazu äquivalent

$$| p_n(x) - e^{x/4} | \leqslant \lambda_n e^{x/4} p_n(x) \qquad \text{für} \quad x \geqslant 0. \tag{7}$$

Daraus ergibt sich

$$p_n(x) \leqslant \frac{e^{x/4}}{1 - \lambda_n e^{x/4}} \leqslant 2e^{x/4} \qquad \text{für} \quad 0 \leqslant x \leqslant a,$$

sofern $\lambda_n e^{a/4} \leqslant \frac{1}{2}$; mit $a = (4n + 4) \lg 3 + 2 \lg 2$ kann dies vorausgesetzt werden, da sonst sogar die gegenüber (2) günstigere Abschätzung $3^n \lambda_n \geqslant (1/6(2)^{1/2})$ gelten würde. Aus (7) folgt so

$$| p_n(x) - e^{x/4} | \leqslant 2\lambda_n e^{x/2} \qquad \text{für} \quad 0 \leqslant x \leqslant a. \tag{8}$$

Diese Ungleichung kann als Tschebyscheff-Approximierbarkeit mit Gewicht $e^{x/2}$ über $[0, a]$ von $e^{x/4}$ gedeutet werden. Das entsprechende Tschebyscheff-Proximum $q_n \in \Pi_n$ erfüllt (8) dann ebenfalls. Außerdem hat $d(x) = q_n(x) - e^{x/4}$ eine $(n + 2)$-stellige Alternante und deshalb mindestens $n + 1$ Nullstellen in $(0, a)$. Andererseits hat d wegen $d^{(n+1)}(x) < 0$ aber höchstens $n + 1$ Nullstellen in $(0, \infty)$, und mit $d(x) \to -\infty$ für $x \to \infty$ folgt so $q_n(x) < e^{x/4}$ für $x \geqslant a$. Weiter schließt man in ähnlicher Weise auf $q_n(x) \geqslant 0$ für $x \geqslant a$: Wäre $q_n(z) < 0$ für ein $z \geqslant a$, dann ergäben sich mit den $n + 1$ Nullstellen $x_1 < \cdots < x_{n+1} < z$ von d nach dem Mittelwertsatz Zwischenwerte

$$x_j' \in (x_j\,, x_{j+1}) \quad (1 \leqslant j \leqslant n) \qquad \text{und} \qquad z' \in (x_{n+1}\,, z)$$

mit $d'(x_j') = 0$ und $q_n'(z') < 0$, letzteres wegen $q_n(x_{n+1}) > 0 > q_n(z)$. n-fache Wiederholung dieser Schlußweise würde zu $q_n^{(n+1)}(z^{(n+1)}) < 0$ führen — im Widerspruch zu $q_n \in \Pi_n$. Aus $0 \leqslant q_n(x) \leqslant e^{x/4}$ für $x \geqslant a$ und der Ungleichung (8) für q_n ergibt sich in Verbindung mit (6)

$$\frac{2}{3^{2n+2}} \leqslant \int_0^\infty e^{-t}(q_n(t) - e^{t/4})^2\, dt \leqslant \int_0^a e^{-t}(2\lambda_n e^{t/2})^2\, dt + \int_a^\infty e^{-t/2}\, dt$$
$$= 4a\lambda_n^2 + 2e^{-a/2};$$

mit $a = (4n + 4) \lg 3 + 2 \lg 2$ folgt daraus die untere Schranke in (2).

Zur Herleitung der oberen Schranke bilden wir mit Hilfe des in (5) genannten Polynoms g_n in Analogie zu

$$\tfrac{3}{4}e^x \int_x^\infty e^{-t}e^{t/4}\,dt = e^{x/4}$$

das Polynom $h_n \in \Pi_n$ der Form

$$h_n(x) = \tfrac{3}{4}e^x \int_x^\infty e^{-t}g_n(t)\,dt = \tfrac{3}{4}\sum_{k=0}^{n} g_n^{(k)}(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{3^m} \sum_{k=0}^{m} L_m^{(k)}(x). \tag{9}$$

Anwendung der Schwarzschen Ungleichung liefert mit (6)

$$\begin{aligned} | e^{x/4} - h_n(x)| &\leqslant \tfrac{3}{4}e^x \int_x^\infty e^{-t}\, | e^{t/4} - g_n(t)|\,dt \\ &\leqslant \tfrac{3}{4}e^x \left(\int_x^\infty e^{-t}\,dt\right)^{1/2} \left(\int_x^\infty e^{-t}(e^{t/4} - g_n(t))^2\,dt\right)^{1/2}, \end{aligned}$$

$$| e^{x/4} - h_n(x)| \leqslant \frac{(2)^{1/2}}{4\cdot 3^n}\, e^{x/2} \qquad \text{für} \quad x \geqslant 0. \tag{10}$$

Für $x \leqslant b = 4n \lg 3 + 2 \lg 2$ folgt daraus

$$h_n(x) \geqslant e^{x/4}\left(1 - \frac{(2)^{1/2}}{4\cdot 3^n}\, e^{x/4}\right) \geqslant \tfrac{1}{2}e^{x/4}, \tag{11}$$

also $h_n(x) > 0$ und in Entsprechung zu (7) vermöge (10)

$$| e^{x/4} - h_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^{1/2}\cdot 3^n}\, e^{x/4}h_n(x) \qquad \text{für} \quad 0 \leqslant x \leqslant b. \tag{12}$$

Für $x \geqslant b$ gilt $h_n'(x) \geqslant 0$, denn für $m \leqslant n$ hat $(-1)^m L_m$ genau m einfache Nullstellen unterhalb von $4m \leqslant 4n < b$, so daß $(-1)^m L_m^{(k)}(x) \geqslant 0$ für $x \geqslant b$ und alle k (vgl. (9)). Deshalb gilt $h_n(x) \geqslant h_n(b) > 0$ für $x \geqslant b$, und mit (11) für $x = b$ folgt

$$\left| e^{-x/4} - \frac{1}{h_n(x)} \right| \leqslant \max\left\{e^{-b/4}, \frac{1}{h_n(b)}\right\} \leqslant 2e^{-b/4} = \frac{2^{1/2}}{3^n} \qquad \text{für} \quad x \geqslant b.$$

Zusammen mit (12) ergibt sich so die obere Schranke in (2).

Die in [1] angegebenen numerischen Werte einiger λ_n liegen näher an der unteren Schranke und lassen so vermuten, daß die wahre Größenordnung der λ_n mit $1/(n^{1/2}\cdot 3^n)$ gegeben ist. Dennoch sind die in (9) explizit genannten h_n gute Näherungen, zumindest als Ausgangsnäherungen bei Berechnung der optimalen p_n in (7).

LITERATUR

1. W. J. CODY, G. MEINARDUS, AND R. S. VARGA, Chebyshev rational approximations to e^{-x} in $[0, \infty)$ and applications to heat-conduction problems, *J. Approximation Theory* **2** (1969), 50–65.
2. G. SZEGÖ, Orthogonal polynomials, *AMS Col. Publ.* **23** (1967).